

УДК 535.015

КВАНТОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВОЛН ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ СВЕТА

© 2025 г. И. А. Терещенко^{1, 2, *}, О. В. Тихонова^{1, 2, 3}

¹ Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», физический факультет, Москва, Россия

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», Научно-исследовательский институт ядерной физики имени Д. В. Скобельцына, Москва, Россия

³ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова Российской академии наук», Москва, Россия

*e-mail: tereshchenko.ia19@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.

После доработки 16.09.2024 г.

Принята в печать 30.09.2024 г.

В рамках полностью квантового подхода изучено взаимное влияние одновременно происходящих процессов параметрического излучения света в вырожденном по частоте режиме и генерации второй гармоники. Выявлен эффект истощения квантовой накачки. Обнаружено установление баланса между рассматриваемыми процессами и достижения равновесного числа фотонов в модах поля. Продемонстрирована генерация сильно перепутанного двухмодового поля.

Ключевые слова: квантовая оптика, неклассический свет, параметрическая генерация света, сжатый вакуум, генерация второй гармоники, перепутанное полевое состояние

DOI: 10.31857/S0367676525010099, **EDN:** DBJZRF

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из важнейших задач квантовой оптики является генерация различных неклассических состояний электромагнитного поля. Так, например, в процессе параметрического излучения света можно получить сжатые состояния электромагнитного поля [1–5]. Важно, что сжатый свет может быть использован для сверхчувствительных измерений с уменьшением уровня шума ниже стандартного квантового предела [6]. При этом крайне востребованными оказываются методы, позволяющие управлять свойствами генерируемого света [7–9]. Еще одним интересным и перспективным направлением является анализ нелинейных процессов, происходящих под действием неклассического света. Данное направление является еще малоизученным в силу своей новизны, однако по нему уже было проведено несколько экспериментальных реализаций, одними из немногочисленных примеров которых служат эксперименты по возбуждению второй гармоники светом в состоянии сжатого вакуума [10]. Эксперименты показали, что начальное состояние поля и состояние фотонов сильно влияют на характеристики вы-

ходного сигнала второй гармоники [10]. В большинстве случаев нелинейные процессы рассматриваются именно в случае классической накачки, так как квантовая накачка характеризуется ограниченным запасом фотонов, которые могут расходоваться в процессе взаимодействия в отличие от классического случая, где число фотонов настолько велико, что их убывание пренебрежимо мало. Тем не менее, физические особенности нелинейных процессов, возникающих под действием неклассических полей, представляют собой крайне важное направление современных квантовых исследований.

В данной работе в рамках полностью квантового рассмотрения исследовано взаимное влияние одновременно происходящих процессов параметрического излучения света в вырожденном по частоте режиме и генерации второй гармоники в нелинейной среде. Нельзя не отметить, что ранее такой полностью квантовый подход уже был успешно применен в ряде работ [11–13]. Так, в работе [11] аналитически в пределе малых времен был описан процесс многократной генерации второй гармоники. В работе [12] в этом же приближении в результате анализа процесса генерации выс-

ших гармоник было показано значительное сжатие фундаментальной моды. Детальный анализ квантового состояния поля фундаментальной моды, возникающий в режиме генерации второй гармоники, был проведен в [13]. В данной работе проведенный анализ выходит за рамки приближения малых времен, а в случае изначально малого запасенного числа фотонов в системе позволяет найти аналитическое решение. Кроме того, в отличие от [11–13], в данной работе основное внимание уделено анализу именно процесса генерации параметрического излучения, поскольку изначально в фундаментальной моде предполагается вакуум. Исследование заключается в анализе вырожденного по частоте режима, в результате чего возникает нелинейное взаимодействие низкочастотной моды и моды на удвоенной частоте. На основе полученного решения были исследованы различные режимы динамики системы, приводящие к перераспределению начальной энергии между высокочастотной и низкочастотной модами. Обнаружены новые эффекты, обусловленные квантовыми свойствами поля в изначально заселенной моде. Аналитически получены интегралы движения в системе и продемонстрированы особенности изменения среднего числа фотонов для каждой из мод поля во времени. Рассмотрены различные начальные состояния каждого из полей, и для каждого из случаев детально проанализировано изменение статистики фотонов в каждой моде в процессе взаимодействия. Получен параметр Шмидта, который количественно характеризует степень перепутанности генерируемых полевых состояний.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Исследуется динамика взаимодействия высокочастотного и низкочастотного полей в нелинейно-оптической среде с ненулевой квадратичной нелинейной восприимчивостью в условиях одновременно происходящих процессов вырожденного по частоте параметрического излучения света и генерации второй гармоники. Взаимодействие полей рассматривается в рамках нестационарного уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi. \quad (1)$$

В исследуемом случае высокочастотное поле является накачкой для вырожденного по частоте процесса параметрической генерации, в то время как фотоны низкочастотного поля стимулируют генерацию света на удвоенной частоте. Гамильтониан такой системы имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + 2\hbar\omega_0 \hat{c} + i\hbar\Gamma (\hat{a}^{+2} \hat{c} - \hat{c}^+ \hat{a}^2), \quad (2)$$

где \hat{a}^+ и \hat{a} — операторы рождения и уничтожения фотона в низкочастотном поле, соответственно, а \hat{c}^+ и \hat{c} — в высокочастотном поле. Коэффициент Γ определяется нелинейной восприимчивостью

среды второго порядка, а частоты ω_0 и $2\omega_0$ — это собственные частоты квантовых полевых осцилляторов, характеризующих низкочастотную и высокочастотную полевые моды, соответственно. Гамильтониан (2) описывает одновременно происходящие и взаимосвязанные процессы генерации параметрического излучения и сигнала суммарной частоты, точнее, второй гармоники, поскольку рассматривается вырожденный режим.

В общем случае нестационарное уравнение Шредингера (1) решается численно с помощью метода разложения решения по собственным (фоковским) состояниям $\varphi_n(q_1)$ и $(\tilde{\varphi}_k(q_2))$ невзаимодействующих подсистем низкочастотного и высокочастотного поля, соответственно:

$$\psi(q_1, q_2, t) = \sum C_{n,k} \varphi_n(q_1) \tilde{\varphi}_k(q_2) e^{-\frac{iE_{nk}t}{\hbar}}, \quad (3)$$

где q_i — безразмерная полевая квадратура моды квантового поля, $C_{n,k}(t)$ — зависящие от времени амплитуды вероятности обнаружить n фотонов в низкочастотном поле и k фотонов в моде второй гармоники, а суммарная энергия E_{nk} определяется следующим образом:

$$E_{nk} = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + 2\hbar\omega_0 \left(k + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

Подстановка решения (3) в уравнение (1) приводит к системе дифференциальных уравнений для амплитуд вероятности $C_{n,k}(t)$:

$$\dot{C}_{n,k} = \Gamma \left(-\sqrt{(n+1)(n+2)} k C_{n+2,k-1} + \sqrt{n(n-1)(k+1)} C_{n-2,k+1} \right). \quad (5)$$

Решение данной системы было найдено аналитически для случая, когда в поле изначально запасено малое количество фотонов.

В общем случае полученное решение позволит нам рассчитать вероятность обнаружить n фотонов в низкочастотной моде и k фотонов в высокочастотной моде по следующей формуле:

$$W_{nk}(t) = |C_{nk}(t)|^2. \quad (6)$$

При этом вероятность обнаружения n фотонов в низкочастотном поле может быть получена по формуле:

$$W_n(t) = \sum_k |C_{nk}(t)|^2. \quad (7)$$

Аналогичная формула используется для вычисления вероятности обнаружения k фотонов в высокочастотной моде:

$$W_k(t) = \sum_n |C_{nk}(t)|^2. \quad (8)$$

В качестве начальных состояний квантового поля были рассмотрены такие неклассические состояния, как фоковское состояние Φ_n с различным числом фотонов n и когерентное состояние $|\alpha\rangle$, которое может быть представлено в виде суперпозиции фоковских состояний [14]:

$$|\alpha\rangle = \sum_n \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \Phi_n. \quad (9)$$

Данное состояние характеризуется распределением Пуассона со средним числом фотонов $\langle N \rangle = |\alpha|^2$ и дисперсией по числу фотонов $D_n = \langle N \rangle$.

Для количественной характеристики запутанности полевых мод был рассчитан параметр Шмидта K [15], который для нашей системы может быть вычислен следующим образом:

$$K = \frac{1}{\sum_{n,a,k,j} C_{nk} C_{ak}^* C_{nj}^* C_{aj}}. \quad (10)$$

Чем больше этот параметр, тем выше степень перепутывания в системе [15, 16]. Минимальное значение параметра Шмидта равняется 1, что соответствует случаю полной независимости полевых мод друг от друга.

Для случая, когда изначально вся энергия запасена в высокочастотной моде и превалирует процесс рождения низкочастотных фотонов, было проведено сравнение полученных результатов со случаем параметрической генерации под действием классической накачки. Гамильтониан такой системы имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^+ \hat{a} + i\hbar\Gamma (\hat{a}^{+2} e^{-2i\omega_0 t} + \hat{a}^2 e^{2i\omega_0 t}), \quad (11)$$

где \hat{a}^+ и \hat{a} — это операторы рождения и уничтожения фотона в полевой моде, соответствующей частоте ω_0 .

Для случая классической накачки изменение среднего числа фотонов в квантовой моде со временем хорошо известно и имеет следующий вид:

$$\langle N_a(t) \rangle = \text{sh}^2(2\Gamma t). \quad (12)$$

Поскольку в случае классической накачки в параметр Γ включена амплитуда поля накачки, обобщение данной формулы на квантовый случай приводит к выражению для правой части (12) в виде

$\text{sh}^2(2\Gamma\sqrt{\langle N_c \rangle}t)$, где $\langle N_c \rangle$ — среднее число фотонов на входе высокочастотной квантовой моды.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Эффект истощения квантовой накачки

Первоначально в работе рассматривается взаимодействие квантовых полей при таком начальном состоянии ψ_{in_1} , что высокочастотное поле находится в фокковском состоянии с 10 фотонами, а низкочастотное — в вакууме. В результате анализа изменения энергии каждой из полевых мод наблюдается периодическая перекачка энергии из одной моды в другую. Так, на рис. 1 представлены осцилляции среднего числа фотонов в низкочастотной моде, на фоне которых режим генерации сигнала параметрического излучения можно увидеть на самом начальном этапе взаимодействия.

Для более детального исследования данного режима сравним воздействие квантовой накачки с влиянием классической, для изучения которой был взят гамильтониан (11), соответствующий системе, состоящей из низкочастотного квантового поля с параметрической нелинейностью. Из рис. 1 видно, что на начальном этапе энергетические кривые совпадают. Однако в силу того, что в случае квантовой накачки изначальный запас фотонов конечен и достаточно мал, с течением времени начинает проявляться все в большей степени эффект истощения накачки. Он проявляется значительным отклонением кривой, полученной в квантовом случае, от результата, соответствующего классической накачке, в которой запас фотонов настолько велик, что их убывание никак не проявляется. Как только эффект истощения накачки становится существенным, возникает режим квазипериодического обмена энергией между полевыми модами.

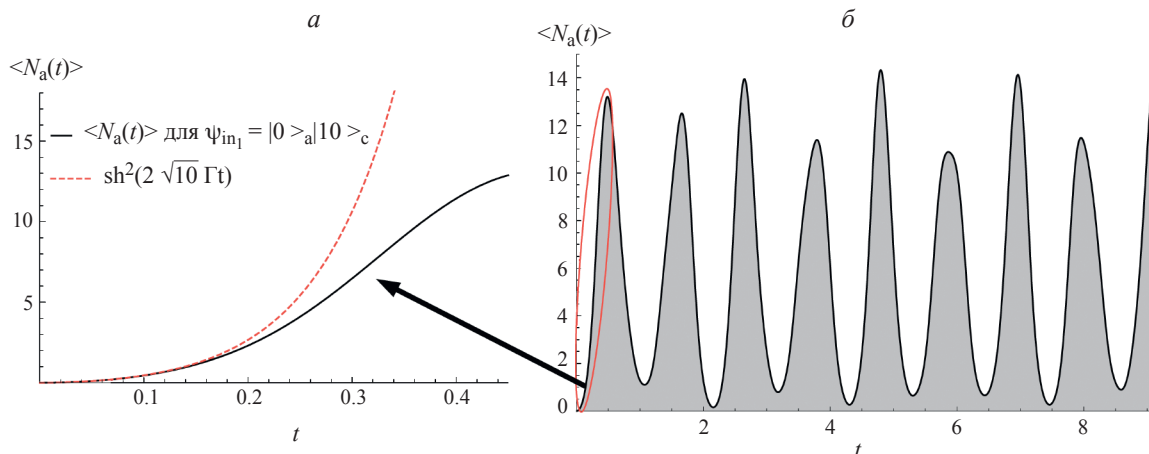


Рис. 1. Сравнение временных зависимостей изменения среднего числа фотонов в низкочастотной моде $\langle N_a(t) \rangle$ в случае численного расчета для системы, состоящей из двух квантовых полевых мод, при начальном условии $\psi_{in_1} = |0\rangle_a |10\rangle_c$ (а) и в случае аналитически полученной зависимости для параметрического излучения с классической накачкой (б).

Эффект достижения равновесного числа фотонов в модах поля

Также был рассмотрен случай, когда высокочастотное поле в начальный момент времени находится в когерентном состоянии $\psi_{in_2} = |0\rangle_a |\alpha\rangle_c$ со средним числом фотонов $\langle N \rangle = 20$. При анализе изменения средних энергий полей на начальных этапах взаимодействия обнаружена перекачка энергии из одной подсистемы в другую, во время которой происходит квазипериодическая смена режимов генерации параметрического излучения и второй гармоники. Эффективность данного процесса постепенно снижается, пока не наступает баланс между процессами генерации фотонов в низкочастотной и высокочастотной полевых модах. Данный эффект соответствует достижению равновесного числа фотонов в каждой из мод поля, что хорошо проиллюстрировано на рис. 2 в виде квазипериодического формирования так называемых «плато», свидетельствующих о том, что среднее число фотонов в каждой из полевых мод практически не меняется со временем.

Формирование перепутанного двумодового полевого состояния

Проанализируем свойства двумодового полевого состояния, формирующегося в интервале времен, соответствующих «плато». Для любого момента времени полевое состояние должно удовлетворять закону сохранения энергии, согласно которому суммарная энергия, запасенная в системе изначально, сохраняется:

$$\langle N_a(t) \rangle + \langle N_c(t) \rangle = const = \langle N_a(0) \rangle + 2\langle N_c(0) \rangle. \quad (13)$$

Более того, анализ системы уравнений Гейзенберга для операторов числа фотонов $\hat{n}_a = \hat{a}^+ \hat{a}$ и $\hat{n}_c = \hat{c}^+ \hat{c}$, записанных для гамильтониана (2),

$$\begin{cases} \dot{\hat{n}}'_a(t) = 2\Gamma (\hat{c}(t)\hat{a}^{+2}(t) + \hat{c}^+(t)\hat{a}^2(t)), \\ \dot{\hat{n}}'_c(t) = -\Gamma (\hat{c}(t)\hat{a}^{+2}(t) + \hat{c}^+(t)\hat{a}^2(t)) \end{cases} \quad (14)$$

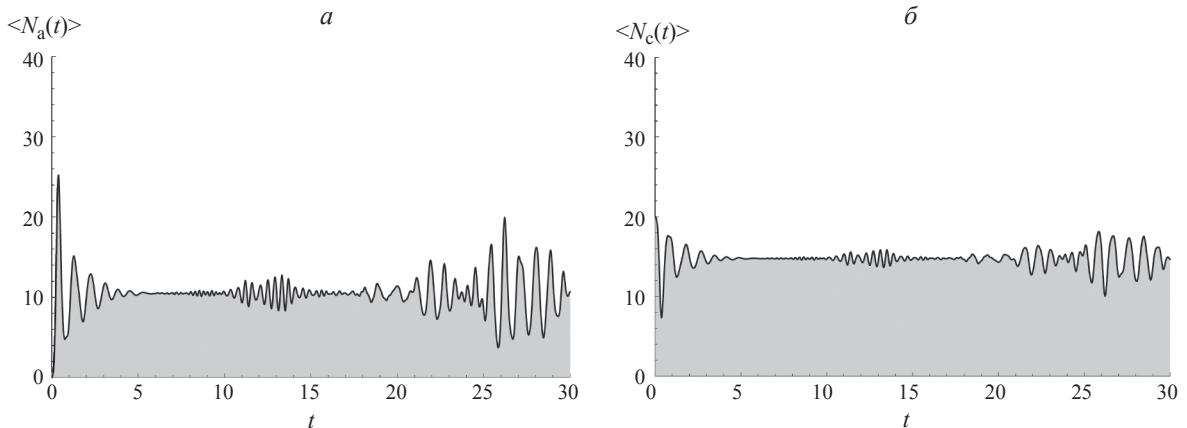


Рис. 2. Временная зависимость среднего числа фотонов в низкочастотной (а) и высокочастотной (б) модах поля в случае начального состояния $\psi_{in_2} = |0\rangle_a |\alpha\rangle_c$, где $|\alpha|^2 = 20$.

позволяет выявить следующий интеграл движения в операторном виде:

$$\hat{I} = \hat{n}_a(t) + 2\hat{n}_c(t). \quad (15)$$

Найденный интеграл движения не только воспроизводит закон сохранения энергии (13), определяя для выбранного начального условия соотношение между средним числом фотонов $\langle k \rangle$ и $\langle n \rangle$ высокочастотной и низкочастотной мод поля в виде:

$$\langle k \rangle = \frac{2|\alpha|^2 - \langle n \rangle}{2}, \quad (16)$$

но и дает возможность получить для любого момента времени дисперсию суммы чисел фотонов в двух модах, которая определяется начальной дисперсией числа фотонов входного высокочастотного поля:

$$D_{n+2k} = 4|\alpha|^2. \quad (17)$$

Соотношения (16) и (17) показывают, что двойное распределение по числу фотонов в полевых модах будет иметь анти-диагональную структуру с характерной шириной, определяемой из (17). Это подтверждает и представленное на рис. 3 полученное численно двумерное распределение по числу фотонов для момента времени, соответствующий «плато». Действительно, распределение имеет анти-диагональный вид с широким разбросом по номерам, квазилинейчатые структуры в распределении, подчиняющиеся закону (16), исходят из четных высоких номеров n , соответствующих вакууму в высокочастотном поле.

Представленное на рис. 3 распределение позволяет детально проанализировать статистические характеристики возникающих «квазистационарных» состояний поля во время установления баланса между процессами генерации фотонов в рассматриваемых полевых модах. Так, для низкочастотного поля в распределении по числу фотонов задействованы лишь четные номера состояний, при этом для низких фоковских состояний характерен спад вероятности с увеличением номера состояния. Таким образом, распределение

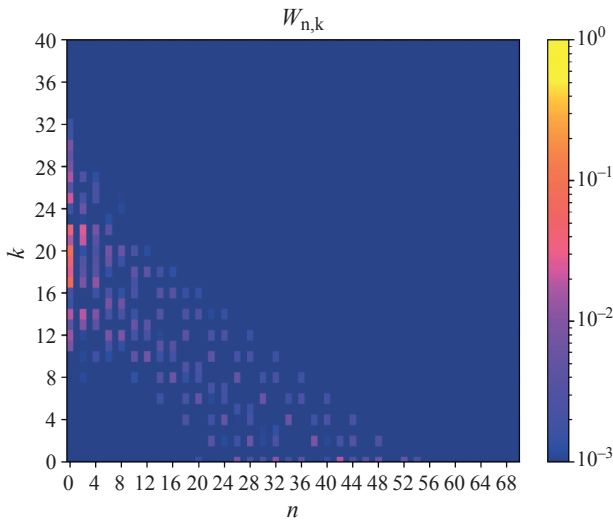


Рис. 3. 2D-распределение вероятности нахождения n фотонов в низкочастотной и k фотонов в высокочастотной моде поля в случае начального состояния $\psi_{in_3} = |0\rangle_a |\alpha\rangle_c$, где $|\alpha|^2 = 20$ для $t = 6$.

низкочастотного поля аналогично распределению для сжатого состояния [2, 16, 17]. Тем не менее, для высоких номеров, соответствующих основаниям анти-диагоналей на рис. 3, возникают локальные пики вероятности. Что касается статистики фотонов высокочастотного поля, то, с одной стороны, распределение Пуассона, соответствующее начальному состоянию (9), сильно деформируется, однако при этом его очертания в изначальной окрестности номеров все же заметны. С другой стороны, наблюдается сильное проявление вакуума, а также низких фоковских состояний с четными номерами. Такое формирование квазистационарных состояний и есть проявление особенностей установления баланса между процессами генерации параметрического излучения и второй гармоники.

Отметим, что, как и можно было ожидать, распределение, представленное на рис. 3, однозначно свидетельствует о формировании перепутанного двумодового полевого состояния, которое не может быть представлено в виде произведения векторов состояний в отдельных модах. Для анализа квантовых корреляций в системе был рассчитан параметр Шмидта (10), который показал, что моды в процессе нелинейного взаимодействия характеризуются высокой степенью запутывания вплоть до тех пор, пока в системе не наступит баланс. В этом случае параметр Шмидта выходит на конкретное значение, примерно равное 5, в окрестности которого осциллирует с малой амплитудой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, изучена динамика взаимного влияния процессов генерации второй гармоники и параметрического излучения, одновремен-

но происходящих в нелинейной среде. Продемонстрирован эффект истощения квантовой накачки при сравнении динамики среднего числа фотонов в низкочастотной моде, в случае квантовой и классической высокочастотной накачки. Обнаружено квазипериодическое формирование «плато» на зависимостях средней энергии в высокочастотном и низкочастотном полях от времени, причем в данном режиме среднее число фотонов в каждой из полевых мод практически не меняется со временем. Продемонстрировано формирование квазистационарного двумодового полевого состояния, возникающего за счет установления баланса между рассматриваемыми процессами, и выявлены его статистические характеристики. Показано, что в процессе взаимодействия полевые моды оказываются сильно перепутаны, причем максимальная перепутанность достигается именно для формирующегося квазистационарного двумодового полевого состояния в режиме баланса энергии между двумя рассматриваемыми нелинейными процессами.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (грант № 075-15-2024-538) и при поддержке фонда «Базис» (грант № 24-2-1-24-1). Исследование выполнено в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фотонные и квантовые технологии. Цифровая медицина».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Klyshko D.N.* Photons and nonlinear optics. N.Y.: Gordon and Breach, 1988.
2. *Захаров P.B., Тихонова O.B.* // УФН. 2023. Т. 193. № 4. С. 406; *Zakharov R.V., Tikhonova O.V.* // Phys. Usp. 2023. V. 66. No. 4. P. 381.
3. *Agafonov I.N., Chekhova M.V., Leuchs G.* // Phys. Rev. A. 2010. V. 82. Art. No. 011801.
4. *Iskhakov T., Chekhova M.V., Leuchs G.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. Art. No. 183602.
5. *Spasibko K.Yu., Iskhakov T.Sh., Chekhova M.V.* // Opt. Express. 2012. V. 20. Art. No. 7507.
6. *Chekhova M.V., Leuchs G., Żukowski M.* // Opt. Commun. 2015. V. 337. P. 27.
7. *Брянцев B.C., Калинович A.A., Захарова И.Г.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2021. Т. 85. № 1. С. 28; *Bryantsev B.S., Kalinovich A.A., Zakharova I.G.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85. No. 1. P. 20.
8. *Калинович A.A., Захарова И.Г., Комиссарова M.B., Сазонов C.B.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2022. Т. 86. № 1. С. 25; *Kalinovich A.A., Zakharova I.G., Komissarova M.V., Sazonov S.V.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2022. V. 86. No. 1. P. 9.
9. *Белинский A.B., Сингх P.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 40; *Belinsky A.V., Singh R.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 30.

10. *Spasibko K.Yu., Kopylov D.A., Krutyanskiy V.L. et al. // Phys. Rev. Lett.* 2017. V. 119. Art. No. 223603.
11. *Chmela P. // Opt. Quantum Electron.* 1984. V. 16. P. 445.
12. *Chmela P., Kozierowski M., Kielich S. // Czech J. Phys.* 1987. V. 37. P. 846.
13. *Nikitin S.P., Masalov A.V. // Quantum Optics.* 1991. V. 3. P. 105.
14. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum optics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
15. *Fedorov M.V., Volkov P.A., Mikhailova J.M. et al. // New J. Phys.* 2011. V. 13. No. 8. Art. No. 083004.
16. *Popolitova D.V., Tikhonova O.V. // Laser Phys. Lett.* 2019. V. 16. Art. No. 125301.
17. *Tereshchenko I.A., Tikhonova O.V. // Laser Phys. Lett.* 2023. V. 20. Art. No. 075301.

Quantum peculiarities of waves in the process of parametric down conversion of light

I. A. Tereshchenko^{a, b, *}, O. V. Tikhonova^{a, b, c}

^a*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics,
Moscow, 119991 Russia*

^b*Lomonosov Moscow State University, Skobeltsyn Scientific Research Institute of Nuclear Physics,
Moscow, 119234 Russia*

^c*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, 125009 Russia*

* *e-mail: tereshchenko.ia19@physics.msu.ru*

We analyzed the mutual influence of simultaneous processes of second harmonic generation and parametric down conversion within the framework of a fully quantum approach. The effect of depletion of quantum pumping has been revealed. The effect of establishing a balance between the processes under consideration and achieving an equilibrium number of photons in the field modes is found. The generation of a strongly entangled two-mode field is demonstrated.

Keywords: quantum optics, non-classical light, parametric down conversion, squeezed vacuum, second harmonic generation, entangled field state