ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2025, том 89, № 2, с. 320–327

УДК 514.86

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТРЕХ ИНВАРИАНТОВ В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В. М. Овсянников*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет транспорта», Академия водного транспорта, Москва, Россия

**E-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru*

Поступила в редакцию 06.09.2024 г.
После доработки 18.10.2024 г.
Принята к публикации 28.10.2024 г.

В работе Эйлера Principia motus fluidorum уравнение неразрывности для жидкости выведено с использованием членов высокого порядка малости, содержащих квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций. Из системы уравнений электродинамики Максвелла выводится волновое уравнение для напряженности электрического поля с учетом квадратичного и кубичного инвариантов, которые описывают генерацию волн напряженности электрического поля.

Ключевые слова: уравнение неразрывности, члены высокого порядка малости, уравнения электродинамики Максвелла, волновое уравнение, поле электрической напряженности

DOI: 10.31857/S0367676525020272, **EDN**: DTWHKW

ВВЕДЕНИЕ

Л.И. Седов в курсе «Механика сплошной среды» [1] (с. 75 первого тома) указал, что современная гидродинамика и электродинамика являются не точными науками, а лишь приближенными, так как пренебрегают учетом высших инвариантов тензора скоростей деформаций: квадратичным и кубичным. Эйлером в раннем варианте доклада 1752 г. в Прусской АН его знаменитой работы Principia motus fluidorum [2–4], опубликованной на латыни, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости было выведено с учетом членов высокого порядка малости по времени деформации контрольной фигуры. Французский текст более позднего доклада 1755 г. в Прусской АН Principes generaux du movement des fluids членов высокого порядка малости не содержит.

Эйлер выводил уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости геометрическим путем сравнением начального объема контрольной фигуры, например, единичного куба, с деформированным деформациями растяжения и сдвига вдоль координатных осей. Эйлер использовал линейный по времени закон деформации, соответствующий линейному лагранжеву закону движения жидкой частицы. Разность объемов скошенного параллелепипеда и начального единичного куба возрастает по кубическому закону от времени. Поэтому уравнение неразрывности получилось, имеющим параболическую зависимость от времени. Поскольку объем скошенного параллелепипеда вычисляется скалярно-векторным произведением векторов, идущих вдоль ребер скошенного параллелепипеда, то результат вычисления объема содержит 16 слагаемых.

К. Труделл [4] в 1954 г. объединил члены высокого порядка малости в якобианы поля скорости второго и третьего порядков

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right]+ + (t-t_0)^2\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=0,$$

где u, v, w — компоненты скорости по осям координат x, y, z, $t-t_0$ — время деформации контрольной фигуры, $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ и $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ — якобианы второго и третьего порядков поля скорости. Эйлер при этом использовал линейный по времени закон движения жидкой частицы.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости с использованием квадратичного I_2 и кубичного I_3 инвариантов поля скорости записывается так

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+(t-t_0)\,I_2+(t-t_0)^2I_3=0,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \partial w/\partial z & \partial w/\partial x \\ \partial u/\partial z & \partial u/\partial x \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{vmatrix}.$$

Будем слагаемые при втором, квадратичном инварианте называть членами второго порядка малости по времени, какими они являются в балансе количества вещества, предшествующем записи уравнения неразрывности. Аналогично будем называть слагаемое, содержащее третий, кубичный инвариант членом третьего порядка малости, как в балансе количества вещества.

В 2006 г. с использованием линейного лагранжева закона движения жидкой частицы было выписано уравнение неразрывности также для сжимаемой среды [5], в которой могут возникать волны плотности и давления. При этом квадратичный и кубичный инварианты, как раз и оказались побудителями генерации гидродинамических волн.

М.В. Остроградский, выводил уравнение неразрывности тоже с использованием линейного лагранжева закона движения жидкой частицы. Поэтому его вывод приводит тоже к параболической зависимости в уравнении неразрывности от времени. Однако он исказил реальные траектории жидких частиц применением направляющих косинусов и поэтому утратил члены высокого порядка малости по времени в уравнении неразрывности. При точном учете траекторий жидких частиц в построениях Остроградского в уравнении неразрывности возникают такие же слагаемые высокого порядка малости, как у Эйлера. Это проверено численно на потенциальном течении обтекания прямого угла.

Максвелл включил в систему уравнений электродинамики уравнение Гаусса–Остроградского, как уравнение, отражающее формы линий тока в жидкости между источником и стоком, и формы линий магнитного поля подковообразного магнита. Это дает основание попробовать включить в уравнения Гаусса–Остроградского слагаемые с квадратичным и кубичным инвариантами. Для описания магнитного поля $\vec{H}$ это было сделано в работах [6–9]. Для расчета поведения электрического поля $\vec{E}$ это делается в этой статье.

В уравнения Максвелла, как в основополагающие для большого количества разделов науки уравнения, временами делаются предложения по их усовершенствованию. Ранее дополнительные слагаемые вносились в систему уравнений Максвелла, как аналоги магнитного заряда. При разработке численных методов решения задач электродинамики тоже вносились в уравнения Максвелла дополнительные слагаемые для улучшения сходимости итераций [10]. Здесь мы делаем дополнение системы уравнений электродинамики членами высокого порядка малости уравнения неразрывности, содержащими высшие инварианты, расширяющее круг описываемых ею задач. Учет членов с высшими инвариантами меняет тип соответствующего волнового уравнения с однородного на неоднородное, которое способно генерировать волны. Ввиду появления решений в виде степенных функций амплитуда возникающих волн может быть большой. В частности, по гидродинамическому волновому уравнению в расчете получена волна, способная поднять ротор гидротурбины Саяно-Шушенской ГЭС в аварии [11], произошедшей в 2009 г. Большого роста напряженностей электрического поля можно ожидать и в электродинамике.

УЧЕТ КВАДРАТИЧНОГО И КУБИЧНОГО ИНВАРИАНТОВ В УРАВНЕНИИ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Имеются основания при выводе волновых уравнений электродинамики, добавить в систему уравнений Максвелла члены с квадратичным и кубичным инвариантами в уравнение Гаусса–Остроградского для напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Полное уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости или газа было записано в 2006 г. [5] в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \\ + (t - t_0)\rho\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial(w,u)}{\partial(z,x)}\right] + \\ + (t - t_0)^2 \rho \partial(u,v,w)/\partial(x,y,z) = 0,$$

где ρ — плотность.

Пока не было выписано уравнение неразрывности для сжимаемого газа [5], учесть в уравнениях Максвелла члены высокого порядка малости было затруднительно, так как члены с якобианами второго и третьего порядков для напряженности электрического поля отличались по размерности от основных членов уравнения Гаусса–Остроградского. Для разрешения этой трудности проанализируем процесс введения плотности ρ в выводе 2006 г. полного уравнения неразрывности [5] для сжимаемого газа с членами высокого порядка малости. В этом выводе для уравнения неразрывности газовой динамики производилось разбиение массового расхода G на произведение плотности и объемного расхода Q

$$G = \rho Q$$

или

$$\rho v S = \rho(vS).$$

Напряженность электрического поля E, измеряемая в системе СИ в В/м, имеет более сложную размерность $[\mathrm{L}^{-1/2} \cdot \mathrm{M}^{1/2} \cdot \mathrm{T}^{-1}]$, чем скорость V с размерностью $[\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}]$, присутствующая под знаком дивергенции в построениях Эйлера. Поэтому, если в члене второго порядка малости встретится произведение двух производных вида $\frac{\partial E_x}{\partial x}$, то за счет размерности множителя $(t - t_0)$ член второго порядка малости не сравняется по размерности с основными членами уравнения первого порядка малости.

Для учета членов высокого порядка малости уравнения неразрывности в уравнениях электродинамики приходится разложить размерность напряженности электрического поля E на произведение, имеющее размерность скорости, и остальную часть K со сложной размерностью

$$[E] = (\text{кг/м})^{0.5} \cdot 1/\text{с} = (\text{кг}^{0.5}/\text{м}^{1.5}) \cdot \text{м/с} = \\ = (\text{кг/м}^3)^{0.5} \cdot \text{м/с}.$$

Наводящим соображением для выделения физически понятного сомножителя, характеризующего электрическое поле, является появление аналога плотности с размерностью кг/м^3, находящейся в непривычной степени 0.5. Его аналогом для электрического поля может служить объемная плотность электрического заряда q, измеряющаяся в кулонах на кубометр или $[\mathrm{L}^{-3/2} \cdot \mathrm{M}^{1/2} \cdot \mathrm{T}^{-1}]$. Выражая массу в кг, линейный масштаб в м, а время в секундах, получаем

$$(\text{кг/м}^3)^{0.5} \cdot 1/\text{с} = \text{Кл/м}^3$$

или

$$(\text{кг/м}^3)^{0.5} = (\text{Кл/м}^3) \cdot \text{с}.$$

Таким образом,

$$[E] = [V]\,[K].$$

Сомножитель K имеет размерность времени, умноженного на объемную плотность заряда.

Для рассмотрения напряженности электрического поля объемная плотность заряда q является определяющей величиной, исходным данным для расчета. Поэтому оставим ее целостной в разложении E на необходимые сомножители

$$[E] = [q]\,[\tau]\,[V] = [K]\,[V] = (\text{Кл/м}^3) \cdot \text{с} \cdot \text{м/с},$$

$$[K] = [q]\,[\tau] = (\text{Кл/м}^3) \cdot \text{с}.$$

Выражение для обобщенного третьего уравнения электродинамики будет иметь вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \left[\frac{\partial \left(\frac{E_x}{K}, \frac{E_y}{K} \right)}{\partial (x, y)} + \frac{\partial \left(\frac{E_y}{K}, \frac{E_z}{K} \right)}{\partial (y, z)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \left(\frac{E_z}{K}, \frac{E_x}{K} \right)}{\partial (z, x)} \right] (t - t_0)(q\tau) + \\ + \frac{\partial \left(\frac{E_x}{K}, \frac{E_y}{K}, \frac{E_z}{K} \right)}{\partial (x, y, z)} (t - t_0)^2 (q\tau) = 0.$$

Отношения вида $\frac{E_x}{K}$ получили размерность скорости, как и в якобианах гидродинамического уравнения. К члену второго порядка малости добавлен множителем коэффициент $[K] = [q]\,[\tau]$, сохраняющий за членом второго порядка малости размерность производной по координате напряженности электрического поля E_x. К члену третьего порядка малости добавлен множителем тоже коэффициент $[K] = [q]\,[\tau]$, сохраняющий за членом третьего порядка малости ту же размерность производной по координате напряженности электрического поля E_x .

Мы скопировали процесс поправки размерности членов высокого порядка малости уравнения теоремы Гаусса—Остроградского с проведения учета сжимаемости в полном гидродинамическом уравнении неразрывности.

Теперь можно произвести сокращение коэффициентов K с вынесением их из-под знаков якобианов и раскрытием как $q\tau$. Получено уравнение Гаусса—Остроградского для напряженности электрического поля

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \left[\frac{(t - t_0)}{q\tau} \right] \left[\frac{\partial (E_x, E_y)}{\partial (x, y)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial (E_y, E_z)}{\partial (y, z)} + \frac{\partial (E_z, E_x)}{\partial (z, x)} \right] + \\ + \left[\frac{(t - t_0)^2}{(q\tau)^2} \right] \frac{\partial (E_x, E_y, E_z)}{\partial (x, y, z)} = 0.$$

Добавление в уравнение Гаусса—Остроградского дополнительных членов позволит более детально учесть поведение электрического поля.

Введение дополнительных членов в уравнение Гаусса—Остроградского для магнитного поля было изложено в работах [6—9] и дало такой результат

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} + \left[\frac{(t - t_0)}{q\tau} \right] \left[\frac{\partial (H_x, H_y)}{\partial (x, y)} + \right. \\ \left. + \frac{\partial (H_y, H_z)}{\partial (y, z)} + \frac{\partial (H_z, H_x)}{\partial (z, x)} \right] + \\ + \left[\frac{(t - t_0)^2}{(q\tau)^2} \right] \frac{\partial (H_x, H_y, H_z)}{\partial (x, y, z)} = 0,$$

где H_x, H_y, H_z — компоненты напряженности магнитного поля вдоль осей координат x, y, z. Здесь введен неизвестный пока коэффициент $q\tau$, уравнивающий размерности слагаемых с различными инвариантами по размерности.

С использованием квадратичного I_{E2} и кубичного I_{E3} инвариантов для электрического поля $\vec{E}$ и квадратичного I_{H2} и кубичного I_{H3} инвариантов для магнитного поля $\vec{H}$ уравнения записываются так

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}+\left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]I_{E2}+\left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]I_{E3}=0,$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}+\left[\frac{(t-t_0)}{q\tau}\right]I_{H2}+\left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]I_{H3}=0.$$

Введение неизвестного коэффициента $q\tau$, уравнивающего размерности слагаемых с различными инвариантами по размерности для уравнения неразрывности для напряженности магнитного поля достаточно полно описано в работе [9]. Отметим только, что он имеет размерность тоже, как произведение плотности электрического заряда на время, как и для напряженности электрического поля. Этим объясняется выбор обозначения одного коэффициента двумя буквами. Перейдем к выводу волнового уравнения для напряженности электрического поля.

ВЫВОД ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

В уравнениях Максвелла уравнения неразрывности для напряженности электрического и магнитного поля имеют подобный вид с точностью до знаков в правых частях. Поэтому вывод волновых уравнение для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ может быть аналогичный.

Система уравнений электродинамики с высшими инвариантами примет вид

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_x}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}+\\+\left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]I_{E2}+\left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]I_{E3}=0,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}+j_x, \tag{5}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}+j_y, \tag{6}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t}+j_z, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial x}+\frac{\partial H_z}{\partial z}+\\+\left[\frac{(t-t_0)}{q\tau}\right]I_{H2}+\left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]I_{H3}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные; ε и μ — относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; j_x, j_y, j_z — компоненты плотности электрического тока вдоль осей координат x, y, z.

В работе [6] был представлен вывод волнового уравнения для напряженности магнитного поля при учете квадратичного I_{H2} и кубичного I_{H3} инвариантов. Давайте выведем волновое уравнение для напряженности электрического поля при учете квадратичного I_{E2} и кубичного I_{E3} инвариантов.

В уравнении (5) перенесем член с плотностью электрического тока j_x в левую часть равенства и получим

$$-j_x+\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}=\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Поменяем стороны равенства местами

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-j_x.$$

Возьмем производную по времени t от обеих частей равенства

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right]-\frac{\partial j_x}{\partial t}. \tag{9}$$

Поменяв порядок взятия производных по времени t и координатам x, y, z, продолжим равенство так

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\right)-\frac{\partial j_x}{\partial t}.$$

Уравнения (3) и (2) приведем к виду

$$\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right].$$

Используя эти уравнения, продолжим равенство для вывода волнового уравнения так

$$=\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 E_y}{\partial x\partial y}\right]-\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial j_x}{\partial t}.$$

В полученном выражении произведем перестановку порядка слагаемых

$$= -\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right] - \\ -\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}\right]. \tag{10}$$

От уравнения (4) возьмем производную по координате x

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \\ + \left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial x} + \left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Сделаем в этом уравнении (11) перестановку порядка слагаемых и умножим каждый член на $\frac{1}{\mu\mu_0}$

$$-\frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z}\right] = \frac{1}{\mu\mu_0}\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right] \times \\ \times \frac{\partial I_{E2}}{\partial x} + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial x}. \tag{12}$$

Обратим внимание на то, что левая часть уравнения (12) совпадает с последним слагаемым равенства (10). Продолжим равенство (10) для вывода волнового уравнения, заменив в нем последнее слагаемое правой частью уравнения (12).

$$= -\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right] + \\ + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial x} + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial x}. \tag{13}$$

Приравняв начальное выражение выводящегося волнового уравнения в виде правой части уравнения (9) полученному выражению (13), получим

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = -\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right] + \\ + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial x} + \frac{1}{\mu\mu_0}\left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial x}.$$

Умножим все слагаемые на $\mu\mu_0$ и сделаем перестановку слагаемых для организации в левой части волнового оператора Даламбера для напряженности электрического поля в направлении оси x

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \\ = \mu\mu_0\frac{\partial j_x}{\partial t} - \left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial x} - \left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial x}.$$

Вводя скорость распространения электромагнитных волн в вакууме c, получим такой вид волнового уравнения для напряженности электрического поля в направлении оси x

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \\ = \mu\mu_0\frac{\partial j_x}{\partial t} - \left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial x} - \left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial x}. \tag{14}$$

Аналогично запишем волновое уравнение в направлении оси y

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \\ = \mu\mu_0\frac{\partial j_y}{\partial t} - \left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial y} - \left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial y} \tag{15}$$

и в направлении оси z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \\ = \mu\mu_0\frac{\partial j_z}{\partial t} - \left[\frac{(t-t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial z} - \left[\frac{(t-t_0)^2}{(q\tau)^2}\right]\frac{\partial I_{E3}}{\partial z}. \tag{16}$$

Для сравнения приведем также полученное в работах [6–9] волновое уравнение для напряженности магнитного поля по оси x

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial J_y}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial y} - \\ - \frac{(t-t_0)}{\tau q}\frac{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(H_y,H_z)}{\partial(y,z)} + \frac{\partial(H_z,H_x)}{\partial(z,x)}\right]}{\partial x} - \\ - \left[\frac{(t-t_0)}{\tau q}\right]^2\frac{\partial\left[\frac{\partial(H_x,H_y,H_z)}{\partial(x,y,z)}\right]}{\partial x}.$$

Мы видим, что волны магнитного поля генерируются, как и электрического поля, производными по координате от второго и третьего инвариантов. Области сильного изменения инвариантов I_{E2} и I_{E3} стационарного поля электрической напряженности по координатам создают волны электрического поля. Области сильного изменения инвариантов I_{H2} и I_{H3} стационарного поля магнитной напряженности по координатам создают волны магнитного поля.

ОБСУЖДЕНИЕ ВИДА РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Развитие техники, приборостроения, измерительных средств, выход в Космос привели к накоплению колоссального объема экспериментальной информации по характеру магнитных и электрических полей и изменению их во времени. Их осмысление, сопоставление с теоретическими моделями, моделирование численными методами надо делать с использованием наиболее полного теоретического аппарата.

Выведенные в предыдущем разделе неоднородные волновые уравнения (14), (15), (16) содержат в правой части волновой оператор Даламбера, передающий через контрольный объем волны напряженности, возникающие на его границах. А неоднородные члены левой части видоизменяют их, создавая новые волны или усиливая имеющиеся. Такое назначение имеют члены, содержащие плотность электрического тока $\vec{j}$ и члены, отражающие скорость изменения квадратичного и кубичного инвариантов поля $\vec{E}$ по координатам x, y, z.

Гидродинамическое волновое уравнение, выведенное с учетом квадратичного I_2 и кубичного I_3 инвариантов поля скорости в сжимаемой жидкости [12], генерирует волны, с интенсивностью, зависящей не от производных инвариантов, а от самой их величины I_2, I_3.

$$\partial^2 p/\partial x^2 + \partial^2 p/\partial y^2 + \partial^2 p/\partial z^2 - c_0^{-2}\partial^2 p/\partial t^2 = \\ = \rho_0 I_2 + (t - t_0)\rho_0 2 I_3.$$

Здесь p — волновое давление, ρ_0 — термодинамическая плотность, c_0 — скорость распространения звука.

С использованием этого гидрогазодинамического уравнения, содержащего квадратичный и кубичный инварианты, решено порядка десяти задач на возникновение акустических волн в определенных местах стационарного поля скорости, где инварианты I_2, I_3 имеют большое значение. Опыт этих решений поможет найти места, где в напряженности стационарного электрического поля производные по координатам от инвариантов I_{E2}, I_{E3} велики. В этих местах можно ожидать генерацию волн напряженности электрического поля.

Решения волновых уравнений имеют вид уединенной волны напряженности электрического поля, возрастающей во времени по степенному закону. За счет члена с производными по координатам от инварианта I_{E2} получается волна, возрастающая пропорционально третьей степени времени. За счет членов с производными по координатам от инварианта I_{E3} генерируется более крутая волна, возрастающая пропорционально четвертой степени времени. Величина неизвестного коэффициента $q\tau$ может быть определена в результате сравнений решений волнового уравнения с результатами натурных наблюдений.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЯСНЕНИЯ ОСТАНОВОК ЛИДЕРА МОЛНИИ МЕЖДУ ДВУМЯ СТУПЕНЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

С 1930-х годов, когда начались фотоэлектрические наблюдения молний, было установлено, что лидер молнии между двумя ступенями совершает остановку. Построению физической и математической модели молнии посвящено много работ, например [13–15]. В работе [13] построена численная модель расчета движения ступенчатого лидера отрицательной молнии. Согласно обзору многочисленных экспериментальных данных, приведенных в этой работе, остановка продвижения лидера между двумя ступенями происходит за время от 0.7 до 146.6 мкс. Средним значением временем остановки принята величина 37.4 мкс $= 37.4 \cdot 10^{-6}$ с. Длина ступеней наблюдается в пределах от 1.3 до 20 м. Согласно текущим знаниям об электрических параметрах отрицательных лидерах молний для инициирования движения требуется большая напряженность электрического поля E^-_{ith} = = 2.68 МВ/м = 2680000 В/м. Дальнейшее продвижение лидера происходит при более низкой напряженности электрического поля, пока оно не понизится до E^-_{pth} = 0.62 МВ/м = 620000 В/м. Это напряженность угасания разряда. С электрическим током вдоль лидера происходит перетекание электрического заряда, который остается в голове лидера, в месте затухания его продвижения. От основного лидера уходят в стороны и затухают слабые разряды, образующие корону вокруг основного лидера. При остановке лидера в конце ступени в пространстве, окружающем молнию, возникает новое, обновленное поле электрической напряженности. Его напряженности недостаточно для продвижения лидера молнии. Согласно решению приведенного выше волнового уравнения (16), для дальнейшего продвижения основного лидера собирается вектор напряженности в новом направлении из-за неравномерности распределения напряженности электрического поля по направлениям, контролируемой производной от квадратичного инварианта по направлению.

Упрощенное волновое уравнение, например, в направлении оси z

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \left[\frac{(t - t_0)}{(q\tau)}\right]\frac{\partial I_{E2}}{\partial z}$$

имеет решение (при $\varepsilon = 1, \mu = 1$) в виде степенной функции

$$E_z = \frac{c^2}{6q\tau}(t - t_0)^3 \frac{\partial I_{E2}}{\partial z}, \qquad (17)$$

где

$$I_{E2} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial z} & \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} & \frac{\partial E_x}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

При окончании разряда на рассматриваемой ступени напряженность электрического поля равна напряженности угасания разряда $E^-_{\text{pth}} = 0.62$ МВ/м $= 620000$ В/м. Путь лидера на рассматриваемой ступени окружен короной, из угасших ответвлений разрядов от основного лидера. Как указано в работе [13], «заряд, перенесенный в узел, соответствующий разрушенному концу ответвления, остается «замороженным» в этом узле из-за низкой проводимости среды». Поэтому можно говорить о возникновении геометрически нового поля электрической напряженности на каждой ступени продвижения лидера. Расстояние изменения электрической напряженности от 620000 В/м до нуля будем считать равным 10 м. Эта величина близка к радиусу цилиндра, использованного в работе [13]. Величину квадратичного, второго инварианта вычислим по изменению напряженности от значения 620000 В/м до нуля на расстоянии 10 м. Тангенциальные производные положим равными нулю. Тогда величину второго, квадратичного инварианта можно оценить так

$$I_{E2} = \begin{vmatrix} \frac{625000}{10} & 0 \\ 0 & \frac{625000}{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{625000}{10} & 0 \\ 0 & \frac{625000}{10} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} \frac{625000}{10} & 0 \\ 0 & \frac{625000}{10} \end{vmatrix} = 1.16 \cdot 10^{10}\ \text{В}^2/\text{м}^2.$$

Вычислим производную от инварианта I_{E2} по направлению z, приняв характерное расстояние изменения величины инварианта $\Delta z = 10$ м.

$$\frac{\partial I_{E2}}{\partial z} = \frac{1.16 \cdot 10^{10}}{10} = 1.16 \cdot 10^9\ \text{В}^2/\text{м}^3.$$

По формуле (17) можно оценить величину $q\tau$, если подставить в нее вычисленное значение производной $\frac{\partial I_{E2}}{\partial z}$ и время повышения напряженности электрического поля до значения напряжения пробоя воздуха $E_z = E^-_{\text{ith}} = 2680000$ В/м, равным $t - t_0 = 37.4 \cdot 10^{-6}$ с. Скорость света $= 3 \cdot 10^8$ м/с.

Расчет дает оценку $q\tau = 3400$ В $\cdot$ с/м^2. После достижения напряжением электрического поля значения пробоя воздуха E^-_{ith} лидером совершается продвижение вдоль новой ступени. Уравнение (17) является результатом упрощения решения волнового уравнения, полученного с учетом вычисленных Эйлером членов высокого порядка малости, нарушающих сохранение и порождающих волну роста напряженности электрического поля. Рост напряженности электрического поля с малой величины до 2.68 МВ/м, использованный в расчете, является примером, когда члены высокого порядка малости дают важные результаты.

Уравнение (17) является возможной математической моделью поведения сплошной среды, предсказанной Эйлером на основании классической геометрии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В уравнении Гаусса—Остроградского для напряженности электрического поля в системе уравнений электродинамики Максвелла учтены выведенные Эйлером члены высокого порядка малости по времени, содержащие квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций.

Выведено волновое уравнение для напряженности электрического поля, учитывающее квадратичный и кубичный инварианты тензора скоростей деформаций, вычисленные Эйлером. Полученные дополнительно неоднородные члены волнового уравнения создают потенциал учетом неравномерности распределения значений якобианов и инвариантов поля электрической напряженности $\vec{E}$ в окружающем пространстве.

Учет квадратичного и кубичного инвариантов в уравнениях электродинамики Максвелла позволяет математически моделировать остановку молний между ступенями для увеличения разности потенциалов, необходимой для движения лидера на следующей ступени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 536 с.
2. *Euler L.* Principia motus fluidorum. Novi commentarii Academiae Imperialis scientiarum Petropolitanae, 1761. P. 271.
3. *Эйлер Л.* Принципы движения жидкостей. Перевод с латыни начальных разделов доклада 1752 г. в Берлинской АН. М.: Изд. «Спутник +», 2020.
4. *Euleri L.* Commentationes Mechanicae ad theoriam corporum pertinentes. Lausannae, 1954.
5. *Овсянников В.М.* // Пробл. аксиомат. в гидрогазодинам. 2006. № 15. С.19.
6. *Овсянников В.М.* // Сб. тр. XXXIV Всеросс. шк.-семин. «Волновые явления: физика и применения» имени профессора А.П. Сухорукова. (Москва, 2023). С. 11.
7. *Овсянников В.М.* // Сб. матер. шк. «Волны и вихри в сложных средах». (Москва, 2021). С. 175.
8. *Овсянников В.М.* // Сб. матер. шк. «Волны и вихри в сложных средах». (Москва, 2022). С. 197.
9. *Овсянников В.М.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2024. Т. 88. № 1. С. 138; *Ovsyannikov V.M.* // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88. No. 1. P. 119.
10. *Шеретов Ю.В.* // Применение функционального анализа в теории приближений. 2012. № 33. С. 82.

11. *Овсянников В.М.* // Инж. журнал: наука и инновации. 2021. № 4. С. 55.
12. *Ovsyannikov V.M.* // J. Math. Sci. 2023. V. 277. No. 5. P. 798.
13. *Syssoev A.A., Iudin D.I., Bulatov A.A., Rakov V.A.* // J. Geophys. Res. V. 125. No. 7. Art. No. e2019JD031360.
14. *Давыденко С.С., Юдин Д.И.* // Радиофиз. и квант. электрон. 2016. Т. 59. № 7. С. 560; *Davydenko S.S., Iudin D.* // Radiophys. Quantum Electron. 2016. V. 59. No. 7. P. 560.
15. *Дульзон А.А., Лопатин В.В., Носков М.Д., Плешков О.Л.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. № 4. С. 48; *Dul'zon A.A., Lopatin V.V., Noskov M.D., Pleshkov O.I.* // Tech. Phys. 1999. V. 44. No. 4. P. 394.

Using the geometric properties of three invariants in the wave equation for the electric field strength

V. M. Ovsyannikov*

Russian University of Transport, Academy of Water Transport, Moscow, 127994 Russia
**e-mail: OvsyannikovVM@yandex.ru*

In Euler's work Principia motus fluidorum, the continuity equation for a fluid is derived using high-order terms of smallness that contain the quadratic and cubic invariants of the strain rate tensor. From Maxwell's system of electrodynamics equations, the wave equation for the electric field strength is derived taking into account the quadratic and cubic invariants. These invariants describe the generation of electric field intensity waves.

Keywords: continuity equation, terms of high order of smallness, Maxwell's equations of electrodynamics, wave equation, electric field